Проблемы физики, математики и техники, № 1 (6), 2011

ФИЗИКА

УДК 535.42+537.86.22

СВОЙСТВА ВЕКТОРНЫХ ПАРАКСИАЛЬНЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ. I. ОДНОРОДНАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

PROPERTIES OF VECTORIAL PARAXIAL LIGHT BEAMS. I. HOMOGENEOUS POLARIZATION

S.S. Girgel

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Предложен простой унифицированный формализм для описания векторных параксиальных световых пучков общего вида. Найдены простые выражения для плотности потока энергии электромагнитного поля **S** векторных световых пучков с однородной поляризацией. Установлено, что параксиальные циркулярно поляризованные световые пучки распространяются независимо, их потоки энергии разделяются и также независимы.

Ключевые слова*: параксиальные пучки, векторные пучки, световые пучки, поляризационные свойства, энергетические свойства, поляризация.*

The simple formalism for the description of the vector paraxial light beams of general type is offered. Simple expressions for the energy flux density of the electromagnetic field **S** of the vector light beams with the homogeneous polarization are discovered. It is discovered that paraxial circular polarized light beams are spread independently, and their streams of energy are parted and they are also independent.

Keywords*: paraxial beams, vector beams, light beams, polarizable properties, energy properties, polarization.*

Введение

Под световыми пучками понимают узконаправленное световое излучение, распространяющееся в малом телесном угле. Если угол расходимости пучка мал, $\theta \sim 10^{-3}$–10^{-2}, такой пучок называется параксиальным. В параксиальных пучках продольная компонента поля значительно меньше поперечных компонент. Поэтому параксиальные пучки описываются обычно одной поперечной компонентой поля. Такие пучки называются скалярными. Чаще всего параксиальные световые пучки описываются как скалярные, что в большинстве случаев вполне достаточно. Такой, заведомо упрощенный подход, часто используется при описании свойств световых пучков [1]–[7]. Однако для пучков, у которых угол расходимости велик, скалярного приближения недостаточно. Более того, даже для параксиальных световых пучков, у которых поляризация неоднородна по сечению, необходимо использовать более строгий векторный формализм. Наконец, скалярное приближение во всех случаях не позволяет естественно описывать векторные характеристики пучка (поляризацию, поток энергии, орбитальный и спиновый моменты и др.). Более общим является описание лазерных световых пучков, как трехмерных векторных полей. Однако векторные пучки изучены гораздо слабее, см., например, [8]–[13]. В настоящей работе предлагается унифицированный и упрощенный векторный формализм для описания поляризационных и энергетических характеристик векторных параксиальных световых пучков.

1 Поляризационные свойства векторных параксиальных световых пучков

Известно, что любой световой пучок можно разложить в ряд или интеграл Фурье по плоским монохроматическим волнам, которые строго поперечны в изотропной однородной среде. Отсюда из геометрических соображений можно высказать следующие общие утверждения о поляризационных характеристиках *произвольных* световых полей.

Возможно существование линейно поляризованных мод в одной плоскости, например,

$$\mathbf{E} = (E_x, 0, E_z) \text{ или } \mathbf{H}=(0, H_y, H_z).$$

Возможны строго поперечные *TE*- и *TM*-моды (в любом приближении). Они являются азимутально поляризованными, без радиальной компоненты. Вектор $\mathbf{E}=(E_x=0, E_y, E_z)$ – для *TE*-мод и вектор $\mathbf{H} = (H_x=0, H_y, H_z)$ – для *TH*-мод.

Существуют радиально поляризованные моды без азимутальных компонент,

$$\mathbf{E} = (E_\rho, E_\varphi=0, E_z).$$

Высказанные соображения относятся как к параксиальным электромагнитным пучкам (Гаусса, Эрмита-Гаусса, Лагерра-Гаусса, Бесселя-Гаусса Матье-Гаусса, Эйри-Гаусса и др.), так и к непараксиальным волновым полям типа Бесселя, Матье, Эйри и др.

Возвратимся теперь к векторным *параксиальным* световым пучкам. Для описания их поляризационных и энергетических характеристик будем использовать упрощенный векторный формализм.

Будем исходить из уравнений Максвелла

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = ik_0\mu\mathbf{H}; \\ \mathrm{rot}\,\mathbf{H} = -ik_0\varepsilon\,\mathbf{E}; \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} \mathrm{div}\,\mu\mathbf{H} = 0; \\ \mathrm{div}\,\varepsilon\mathbf{E} = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

для монохроматических световых пучков в прозрачных изотропных средах, характеризуемых материальными уравнениями связи

$$\mathbf{D} = \varepsilon\,\mathbf{E},\ \ \mathbf{B} = \mu\,\mathbf{H}. \tag{1.3}$$

Здесь и далее используются обозначения:

$$k_0 = \frac{\omega}{c},\quad n^2 = \varepsilon\mu,\quad k = k_0 n. \tag{1.4}$$

Полагаем также $\mu \neq 1$, чтобы результаты можно было применять не только в оптике, и в радиодиапазоне частот электромагнитного излучения. Кроме того, одновременное присутствие проницаемостей ε и μ позволяет использовать симметрию уравнений Максвелла относительно замен $\varepsilon \leftrightarrow -\mu, \mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{H}$.

Из (1.1), (1.3) следует векторное уравнение Гельмгольца

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \tag{1.5}$$

простейшим решением которого является плоская волна $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}e^{ikz}$. У таких волн волновой фронт – плоский, а амплитуда $\mathbf{E}$ – константа. Для параксиальных световых пучков волновой фронт – квазиплоский. Поэтому общее электрическое поле параксиальных векторных световых пучков можно описывать функцией вида

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}e^{i(kz-\omega t)}, \tag{1.6}$$

где, однако, векторная амплитуда $\mathbf{E}$ не является постоянной, а зависит от координат x, y, z. Тогда векторное уравнение Гельмгольца (1.5) для параксиальных пучков $\left(\left|\nabla^2\mathbf{E}\right| << \left|2ik\partial_z\mathbf{E}\right|\right)$ сводится к векторному параболическому уравнению

$$\left(\nabla_\perp^2 + 2ik\partial_z\right)\mathbf{E} = 0, \tag{1.7}$$

где $\nabla_\perp$ – векторный поперечный оператор набла

$$\nabla_\perp = \mathbf{e}_x\partial_x + \mathbf{e}_y\partial_y. \tag{1.8}$$

В параксиальных пучках продольная компонента поля $\left|E_z\right|$ значительно меньше поперечных компонент, т. е. $\left|E_z\right| << \left|\mathbf{E}_\perp\right|$. Поэтому все векторные поперечные амплитуды поля параксиального светового пучка можно выразить через его поперечные компоненты электрического поля $\mathbf{E}_\perp$, а продольные компоненты E_z и H_z можно найти из уравнений непрерывности (1.2). Получаем в этом приближении

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\perp + \frac{i}{k}\nabla_\perp\mathbf{E}_\perp\cdot\mathbf{e}_z, \tag{1.9}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_\perp + \frac{i}{k}\nabla_\perp\mathbf{H}_\perp\cdot\mathbf{e}_z, \text{ где } \mathbf{H}_\perp = \frac{\varepsilon}{n}\left[\mathbf{e}_z,\mathbf{E}_\perp\right]. \tag{1.10}$$

Здесь и далее $\mathbf{e}_z$ – единичный вектор в направлении оси z пучка, n – показатель преломления среды.

Чтобы найти поперечные компоненты электрического поля $\mathbf{E}_\perp$ светового пучка, рассмотрим скалярное параболическое уравнение

$$\left(\nabla_\perp^2 + 2ik\partial_z\right)F = 0. \tag{1.11}$$

Теперь в качестве поперечных компонент векторов $\mathbf{E}_\perp$ можно взять любые комбинации решений уравнения (1.11).

Из (1.7)–(1.11) следует также, что можно выделить следующие четыре типа векторных параксиальных световых пучков:

$$\mathbf{E}^{(1)} = \Lambda\mathbf{E}_\perp,\quad \mathbf{H}^{(1)} = \frac{\varepsilon}{n}\mathbf{E}^{(2)}; \tag{1.12}$$

$$\mathbf{E}^{(2)} = \Lambda\left[\mathbf{e}_z,\mathbf{E}_\perp\right],\quad \mathbf{H}^{(2)} = -\frac{\varepsilon}{n}\mathbf{E}^{(1)}; \tag{1.13}$$

$$\mathbf{E}^{(3)} = (\nabla_\perp + 2\partial_z\mathbf{e}_z)F,\quad \mathbf{H}^{(3)} = \frac{\varepsilon}{n}\mathbf{E}^{(4)}; \tag{1.14}$$

$$\mathbf{E}^{(4)} = \left[\mathbf{e}_z,\nabla_\perp\right]F,\quad \mathbf{H}^{(4)} = -\frac{\varepsilon}{n}\mathbf{E}^{(3)}. \tag{1.15}$$

Здесь введен оператор

$$\Lambda = 1 + \frac{i}{k}\mathbf{e}_z\cdot\nabla_\perp \tag{1.16}$$

восстановления полного поля по его поперечной части. Точка в (1.16) означает прямое произведение векторов $\left((\mathbf{e}_z\cdot\nabla_\perp)_{ik} = (\mathbf{e}_z)_i(\nabla_\perp)_k\right)$.

Видна замечательная симметрия между векторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Векторы магнитного поля одних мод пропорциональны векторам электрического поля других мод и удовлетворяют соответствующим соотношениям ортогональности

$$\mathbf{E}^{(1)}\mathbf{E}^{(2)} = \mathbf{H}^{(1)}\mathbf{H}^{(2)} = \mathbf{E}^{(1)}\mathbf{H}^{(1)} = \mathbf{E}^{(2)}\mathbf{H}^{(2)} = 0;$$

$$\mathbf{E}^{(3)}\mathbf{E}^{(4)} = \mathbf{H}^{(3)}\mathbf{H}^{(4)} = \mathbf{E}^{(3)}\mathbf{H}^{(3)} = \mathbf{E}^{(4)}\mathbf{H}^{(4)} = 0$$

в принятом приближении (пренебрегая членами второго порядка малости). Например, соотношение ортогональности $\mathbf{E}^{(3)}\mathbf{E}^{(4)} = 0$ означает, что векторы $\mathbf{E}^{(3)}$ и $\mathbf{E}^{(4)}$ имеют одинаковую эллиптичность, главныеоси эллипсов поляризации повернуты на 90°, а их направления вращения одинаковы.

Существуют также строго поперечные моды: мода с вектором $\mathbf{H}^{(3)}$ является *TH*-модой, а мода с вектором $\mathbf{E}^{(4)}$ – *TE*-модой. (Свойства *TE*- и *TM*- мод обсуждались, например, в [9]–[11].)

Таким образом, поиск решений векторного уравнения (1.7) для электрического поля в виде параксиальных векторных световых пучков мы свели к решению скалярного параболического уравнения (1.11). При этом не требуется интегрирование уравнений Максвелла. Разумеется, для поиска решений уравнения (1.7) можно было также применить метод потенциалов Герца [12] или вводить магнитный и электрический векторные потенциалы [3]. Однако для параксиальных пучков это приводит к неоправданным усложнениям.

2 Энергетические свойства векторных параксиальных световых пучков

Усреднённые по времени плотность энергии w и плотность потока энергии электромагнитного поля (вектор Пойнтинга) **S** световых пучков определяются как [14], [15]

$$w = \frac{\varepsilon|\mathbf{E}|^2 + \mu|\mathbf{H}|^2}{16\pi};$$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\left[\mathbf{E}^*\mathbf{H}\right].$$

Для параксиальных пучков, учитывая (1.1)–(1.7), находим, в первом приближении, что плотность энергии w светового пучка

$$w = \frac{\varepsilon|\mathbf{E}_\perp|^2}{8\pi} = \frac{\mu|\mathbf{H}_\perp|^2}{8\pi}, \qquad (2.1)$$

т. е. $w_e = w_m$, как и для плоских монохроматических волн [15].

Продольный поток энергии

$$\mathbf{S}_z = \frac{c}{n}w, \qquad (2.2)$$

снова как для плоских монохроматических волн. Однако существует также поперечный поток энергии

$$\mathbf{S}_\perp = \frac{c\varepsilon}{8\pi nk}\mathrm{Im}\left(\mathbf{E}_\perp^*\cdot\nabla_\perp\mathbf{E}_\perp + \left[\mathbf{e}_z,\mathbf{E}_\perp^*\right]\cdot\left[\nabla_\perp,\mathbf{e}_z\right]\mathbf{E}_\perp\right), \qquad (2.3)$$

который не учитывается скалярной теорией. Можно, учитывая соотношения (1.7)–(1.11), выразить также вектор $\mathbf{S}_\perp$ в другой форме:

$$\mathbf{S}_\perp = -\frac{c}{8\pi n}\mathrm{Re}\left(\varepsilon\mathbf{E}_\perp^*\cdot E_z + \mu\mathbf{H}_\perp^*\cdot H_z\right).$$

3 Свойства векторных мод с однородной поляризацией

Обсудим теперь свойства параксиальных векторных световых пучков первого типа $(\mathbf{E}^{(1)},\mathbf{H}^{(1)})$. Для анализа их поляризационных характеристик представим поперечную часть векторной амплитуды пучка в виде

$$\mathbf{E}_\perp = \mathbf{e}_\perp F,$$

где F является некоторым решением параксиального параболического уравнения (1.11), а комплексный постоянный вектор поляризации $\mathbf{e}_\perp$ не зависит от координат (x, y). Такие пучки обладают поляризацией, однородной по сечению пучка, и чаще всего используются.

Можно разложить нормированный вектор поляризации $\mathbf{e}_\perp$ по декартовому базису $(\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y,\mathbf{e}_z)$:

$$\mathbf{e}_\perp = \frac{\eta_x\mathbf{e}_x + \eta_y\mathbf{e}_y}{\sqrt{|\eta_x|^2 + |\eta_y|^2}}. \qquad (3.1)$$

Здесь η_x и η_y – некоторые постоянные комплексные параметры, $|\mathbf{e}_\perp|^2 = 1$. Тогда векторы электрического и магнитного полей пучков типа *1* равны

$$\mathbf{E}^{(1)} = \Lambda\mathbf{e}_\perp F, \quad \mathbf{H}^{(1)} = \frac{\varepsilon}{n}\Lambda[\mathbf{e}_\perp,\mathbf{e}_z]F. \qquad (3.2)$$

Азимут ψ и эллиптичность $\gamma = \mathrm{tg}\,\chi$ эллиптически поляризованных мод (3.2) в их поперечном сечении можно выразить через комплексный параметр $\eta = \eta_y/\eta_x$ по формулам [14]:

$$\mathrm{tg}\,2\psi = \frac{2\mathrm{Re}\,\eta}{1-|\eta|^2}; \qquad \sin 2\chi = \frac{2\mathrm{Im}\,\eta}{1+|\eta|^2}. \qquad (3.3)$$

Можно также, согласно Федорову [15], ввести комплексный угол $(\psi + i\xi)$ соотношением $\eta = \mathrm{tg}(\psi + i\xi)$, тогда азимут световой волны равен ψ, а ее эллиптичность γ выражается как $\gamma = \mathrm{th}\,\xi$.

Плотности энергии и потока энергии электромагнитного поля соответственно равны:

$$w = \frac{\varepsilon|F|^2}{8\pi}; \quad \mathbf{S}_z = \frac{c}{n}w;$$

$$\mathbf{S}_\perp^{(1)} = \frac{c\varepsilon}{8\pi nk}\cdot\mathrm{Im}\left[F^*\left(\nabla_\perp + i\cdot\sin 2\chi\cdot\left[\nabla_\perp,\mathbf{e}_z\right]\right)F\right]. \qquad (3.4)$$

Важны предельные случаи, когда соотношения существенно упрощаются.

1. Пусть $\eta = 0$. Тогда $\chi = 0$ и имеем поляризацию в плоскости (x, z), т.е. плоско поляризованный пучок, PPE_x (plane polarized) – по терминологии Шимоды [11].

2. Пусть $\eta = \pm i$. Тогда $\sin 2\chi = \pm 1$ и получаем циркулярно поляризованные *CPE* (circular polarized) *E*-моды. При этом

$$\mathbf{E}_\pm^{(1)} = \left(\mathbf{e}_\pm + \frac{i}{k}\mathbf{e}_z\partial_\pm\right)F;$$

$$\mathbf{H}_\pm^{(1)} = \mp i\frac{\varepsilon}{n}\mathbf{E}_\pm^{(1)};$$

$$\mathbf{S}_{\perp\pm}^{(1)} = \frac{c\varepsilon}{4\pi nk}\mathrm{Im}(F^*\mathbf{e}_\mp\partial_\pm F),$$

где векторы поляризации и операторы дифференцирования в циркулярном базисе соответственно равны:

$$\mathbf{e}_\pm = \frac{\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}};$$

$$\partial_\pm = \mathbf{e}_\pm\nabla_\perp = \frac{\partial_x \pm i\partial_y}{\sqrt{2}}.$$

Векторы циркулярного базиса удовлетворяют соотношениям

$$[\mathbf{e}_\pm, \mathbf{e}_\mp] = \mp i\mathbf{e}_z, \quad [\mathbf{e}_\pm, \mathbf{e}_z] = \pm i\mathbf{e}_\pm,$$

$$\mathbf{e}_+\mathbf{e}_- = |\mathbf{e}_\pm|^2 = 1, \quad \mathbf{e}_\pm^2 = 0.$$

Альтернативно (3.1) можно разлагать вектор поляризации $\mathbf{e}_\perp$ не по по декартовому, а по циркулярному базису $(\mathbf{e}_+, \mathbf{e}_-, \mathbf{e}_z)$:

$$\mathbf{e}_\perp = \frac{\eta_+\mathbf{e}_+ + \eta_-\mathbf{e}_-}{\sqrt{|\eta_+|^2 + |\eta_-|^2}},$$

где η_+ и η_- – некоторые постоянные комплексные параметры. Теперь поляризационные характеристики однородно поляризованных пучков типа *1* можно выразить через параметры полярного разложения комплексного параметра $\eta_c = \eta_- / \eta_+$. Эллиптичность пучка (отношение полуосей эллипса поляризации) и азимут большей оси эллипса поляризации относительно оси OX соответственно равны

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{1 - |\eta_c|}{1 + |\eta_c|};$$

$$\psi = \frac{1}{2}\arg\eta_c.$$

Поле более общего эллиптически поляризованного параксиального пучка также целесообразно разложить в когерентную сумму двух циркулярно поляризованных пучков с противоположными направлениями вращения, т. е.

$$\mathbf{E}_\perp = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-, \qquad (3.5)$$

$$\left(\mathbf{E}_+^2 = \mathbf{E}_-^2 = 0\right).$$

Можно убедиться, что плотности энергии и потока энергии электромагнитного поля соответственно равны:

$$w = \frac{\varepsilon}{8\pi}\left(|\mathbf{E}_+|^2 + |\mathbf{E}_-|^2\right); \ \mathbf{S}_z = \frac{c}{n}w; \qquad (3.6)$$

$$\mathbf{S}_\perp^{(1)} = \frac{c\varepsilon}{4\pi nk}\cdot \operatorname{Im}\left[\mathbf{E}_+^* \cdot \nabla_\perp \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-^* \cdot \nabla_\perp \mathbf{E}_-\right]. \quad (3.7)$$

Таким образом, мы видим, что параксиальные циркулярно поляризованные моды распространяются независимо, энергетические характеристики их разделяются и также независимы:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-;$$

$$w = w_+ + w_-; \qquad (3.8)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_+ + \mathbf{S}_-.$$

В то же время, как мы выше показали, если эллиптически поляризованный пучок разложить в когерентную сумму двух линейно поляризованных пучков, то такие пучки не являются независимыми и интерферируют. Вклады в общий поток энергии $\mathbf{S}$ обоих пучков в последнем случае не разделяются. Таким образом, циркулярно поляризованные моды являются, в некотором смысле, более фундаментальными, чем линейно поляризованные. Это обусловлено вращательной инвариантностью циркулярных мод относительно оси z пучка.

Свойства параксиальных векторных световых пучков *3* и *4* типов с неоднородной поляризацией и их когерентных суперпозиций будут исследованы нами в дальнейшем.

Заключение

Для описания поляризационных и энергетических характеристик векторных параксиальных световых пучков предложен упрощенный векторный формализм, не требующий решений уравнений Максвелла. Показано, что произвольный векторный параксиальный пучок однозначно определяется линейной комбинацией решений скалярного параболического уравнения.

Для векторов электрического и магнитного полей пучков установлена симметрия и соотношения ортогональности между ними. Найдены простые выражения для плотности потока энергии электромагнитного поля **S** векторных световых пучков с однородной поляризацией. Для дальнейшего изучения их свойств необходима специализация найденных общих выражений на конкретные типы пучков.

Установлено, что параксиальные циркулярно поляризованные моды распространяются независимо друг от друга, их плотности энергии и плотности потока энергии разделяются и также являются независимыми. Последний парадоксальный, на первый взгляд, вывод обусловлен циркулярными поляризациями пучков и их параксиальностью. Это свойство может найти применение в оптических системах передачи и обработки и информации, поскольку может увеличивать пропускную способность оптического канала.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Boyd, G.D.* Confocal multimode resonator for millimeter through optical wavelength masers / G.D. Boyd, J. Gordon // Bell Syst. Techn. Journ. – 1961. – Vol. 40. – C. 489–508.

2. *Goubau, G.* On the guided propagation of electromagnetic wave beams / G. Goubau, F. Schwering // IRe Trans. Antennas Propag. AP-9. – 1961. – P. 1808–1813.

3. *Deshamps, G.A.* Gaussian beams as a bundle of complex rays / G.A. Deshamps // Electron. Lett. – 1971. – Vol. 7. – P. 684–685.

4. *Когельник, Х.* Резонаторы и световые пучки лазеров / Х. Когельник, Т. Ли // ТИИЭР. – 1966. – Т. 54., № 10. – С. 95–112.

5. *Бельский, А.М.* Пространственная структура лазерного излучения / А.М. Бельский, Т.М. Корнейчик, А.П. Хапалюк. – М. : Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1982. – 198 с.

6. *Ардашев, А.Ю.* Некоторые свойства узкого монохроматического светового пучка / А.Ю. Ардашев, В.А. Кашин, Г.В. Скроцкий // Известия вузов. Радиофизика. – 1968. – Т. 11, № 12. – С. 1848–1851.

7. *Гончаренко, А.М.* Гауссовы пучки света / А.М. Гончаренко. – Мн. : Наука и техника, 1977. – 144 с.

8. *Davis, L.W.* TM and TE electromagnetic beams in free space / L.W. Davis, G. Patsakos // Optics Letters. – 1981. – Vol. 8, № 1. – P. 22–23.

9. *Хаус, Х.* Волны и поля в оптоэлектронике / Х. Хаус. – М. : Мир, 1988. – 432 с.

10. *Shimoda, Koichi*. Vectorial analysis of the Gaussian beams of light / Koichi Shimoda // J. Phys. Soc. Japan. – 1991. – Vol. 60, № 1. – P. 141–144.

11. *Вайнштейн, Л.А.* Электромагнитные волны / Л.А. Вайнштейн. – М. : Радио и связь, 1988. – 440 с.

12. *Seshadri, S.R.* Electromagnetic Gaussian beam / S.R. Seshadri // J. Opt. Soc. Am. A. – 1987. – Vol. 15, № 22. – P. 2712–2719.

13. *Борн, М.* Основы оптики / М. Борн, Е. Вольф. – М. : Наука, 1970. – 587 с.

14. *Федоров, Ф.И.* Оптика анизотропных сред / Ф.И. Федоров. – Мн.: Изд-во АН БССР, 1976. – 380 с.

Поступила в редакцию 14.02.11.